

ARTÍCULO MONOGRÁFICO

Incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza y desarrollo del pensamiento lógico-matemático*

[Incorporation of the new technologies in the education and development of the thought logician-mathematician]

RICARDO ALBERTO MUÑOZ-ARANGO¹

RECIBO: 10.08.2010 - AJUSTE: 26.11.2010 - APROBACIÓN: 09.12.2010

Resumen

Es frecuente encontrar una tendencia marcada en los estudiantes que presentan dificultades en los ECAES, a pesar de haberse preparado para ellos. Una de las razones detectadas radica en la falta de entendimiento y planteamiento de soluciones de los diferentes ejercicios propuestos en dichas pruebas; posiblemente uno de los inconvenientes mayores es que no se efectúa una lectura y reflexión apropiada que les permita procesar la información y posteriormente plantear y desarrollar el problema para la búsqueda de la solución.

En este artículo se pretende motivar a educadores y estudiantes para que incursionen en la ciencia llamada Heurística, que antiguamente tenía por objeto el estudio de las reglas y los métodos del descubrimiento y la invención y a cuyo desarrollo contribuyeron importantes personajes de ciencia tales como Newton, Leibniz, René Descartes y Bolzano entre otros. En la era moderna, la

* Modelo para citación de este artículo:
MUÑOZ ARANGO, Ricardo Alberto (2010). Incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza y desarrollo del pensamiento lógico-matemático. En: Ventana Informática. No. 23 (jul.-dic., 2010). Manizales (Colombia): Universidad de Manizales. p. 159-180. ISSN: 0123-9678

1 Ingeniero Químico. Especialista en Informática y Computación, Candidato a Doctor en Matemáticas y Aplicaciones Científico-técnicas, Universitat d' Alicante-España.
Docente, Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia. Correo electrónico: rama367@hotmail.

Heurística comprende el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales, útiles en este proceso; actualmente con la divulgación de las innumerables herramientas informáticas se hace necesario incorporar el componente tecnológico que complementa el desarrollo y la búsqueda de soluciones a los problemas matemáticos y de ésta forma mejorar el pensamiento lógico matemático.

Palabras clave: *Heurística, planteamiento y solución de problemas, herramientas informáticas, pensamiento lógico matemático, Matlab.*

Abstract

It is frequent to find a trend marked in the students who present difficulties in the ECAES, in spite of having been prepared for them. One of detected reasons takes root in the lack of understanding and exposition of solutions of the different exercises proposed in the above mentioned tests; possibly one of the major disadvantages is that there is not effected a reading and appropriate reflection that allows them to process the information and later to consider and to develop the problem for the search of the solution.

In this one article tries to be motivated to educators and students in order that they penetrate into the so called Heuristic science, which former took as an object the study of the rules and the methods of the discovery and the invention and to whose development such important prominent figures of science contributed as Newton, Leibniz, René Descartes y Bolzano between others. In the modern age, the Heuristic one he understands the method that he leads to the solution of problems, especially the mental, useful operations in this process; nowadays with the spreading of the innumerable IT tools it becomes necessary to incorporate the technological component that complements the development and the search of solutions to the mathematical problems and of this one it forms to improve the logical mathematical thought.

Keywords: *Heuristic, exposition and solution of mathematical problems, IT tools, logical mathematical thought, Matlab.*

Introducción

Desde sus orígenes el hombre ha tenido la necesidad de la información, Ésta, que en principio, se recogía en forma oral con el surgimiento de la escritura comenzó a almacenarse en medios que evolucionaron desde la tablillas hasta el papel, pasando por los papiros y los pergaminos; se puede decir que el tratamiento de la información es tan antigua como el hombre y se ha ido potenciando y haciendo más sofisticado con el transcurso del tiempo hasta llegar a la era de la electrónica. El hombre no ha parado a lo largo de la historia de crear máquinas y métodos para procesar la información.

Para facilitar esta tarea, en especial en el mundo actual, donde la cantidad de información es demasiada surge la informática y computación; el término informática proviene de la unión de las palabras información y automática; de forma general se puede decir que la informática es la ciencia ó conjunto de conocimientos científicos que permiten el tratamiento automático de la información por medio de computadoras; además por información se entiende cualquier conjunto de símbolos que representan hechos, objetos o ideas. El término computadora es básicamente una máquina compuesta de una serie de circuitos electrónicos que es capaz de recoger unos datos de entrada, efectuar con ellos unos cálculos, operaciones lógicas y operaciones aritméticas y devolver los datos o información resultante a través de algún medio de salida.

En la actualidad, el mundo vive una revolución tecnológica, razón por la cual el número de conocimientos culturales, técnicos, teorías y habilidades estratégicas aumentan de manera rápida, lo anterior pone en evidencia el gran reto que tiene la educación en evolucionar a la par con la tecnología, y lograr incorporar nuevas estrategias de enseñanza, que puedan ser articuladas con los modernos descubrimientos científicos y las nuevas tecnologías de la información y la comunicación; lo que exige al estudiante aprovechar los adelantos y nuevas tecnologías para su proceso de formación profesional.

El presente artículo presenta una estrategia de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos, señalando cómo se puede emplear un apoyo informático en la solución y construcción de gráficas en diferentes dimensiones.

Existen algunos software que se pueden emplear en la enseñanza y solución de problemas matemáticos, como *Matlab*, un lenguaje de alto rendimiento que puede ser empleado para ejecutar cálculo numérico, gráfico y simbólico de forma rápida y precisa, acompañado de carac-

terísticas y de visualización avanzadas aptas para el trabajo científico y de ingeniería.

1. Estrategias de aprendizaje

El aprendizaje estratégico es definido como aquel conjunto de procesos cognitivos que ocurren cuando el estudiante intenta aprender y se enfrenta con situaciones, que le exigen una reflexión profunda y analítica en la resolución de un problema o en la determinación de un camino, para buscar y encontrar soluciones a un problema determinado. Estas estrategias, de acuerdo con Weinstein y Mayer (1986, 315) van desde las simples habilidades de estudio (como el subrayado de la idea principal), hasta los procesos de pensamiento complejo (como el de usar las analogías para relacionar el conocimiento previo con la nueva información).

Este tipo de aprendizaje requiere de la actuación estratégica, la cual implica que el estudiante tenga la habilidad y capacidad de ajustar su comportamiento a las exigencias de una actividad o una tarea específica, que exige complementariamente la:

- Reflexión consciente sobre los objetivos que persigue la tarea.
- Planificación de lo que se debe hacer y cómo se llevará a cabo.
- Disposición de los recursos para efectuar la tarea.
- Realización de la tarea o actividad a desarrollar.
- Evaluación de la actuación.
- Acumulación de información sobre la posibilidad de transferencia del conocimiento adquirido y de utilización de estrategias, evaluando los beneficios.

La estrategia de aprendizaje se considera como una acción o actividad de reflexión que le permite al estudiante elegir, coordinar y aplicar procedimientos ya consolidados en su mente, para conseguir un fin relacionado con su aprendizaje.

Ahora bien, todas las personas emplean estrategias de aprendizaje al momento de estudiar o asumir situaciones cotidianas, pero no todas, son conscientes de que las están usando y por lo tanto no son eficaces al emplearlas. La estrategia como una acción mental, exige una representación interna del problema; la representación, a su vez, significa comprender el problema desde el inicio hasta el final, establecer las variables que intervienen en el problema y crear una imagen mental del

enunciado. Para efectuar una representación del problema o situación, se requiere como mínimo lo siguiente:

- Leer de manera comprensiva y detenida el problema en cuestión, esto significa que se pueda establecer de manera precisa toda la información solicitada en el problema, al igual que se pueda identificar sin ningún tipo de confusión la información previa que suministra el problema.
- Hacer gráficas, que permitan comprender el enunciado y las relaciones existentes y faciliten la representación mental.
- Poner la información suministrada sobre el esquema y la información requerida con el firme propósito de facilitar la comprensión del problema.

La lectura comprensiva es, sin duda alguna, la capacidad más importante que cualquier estudiante debe adquirir y desarrollar a lo largo de su vida académica, para lo cual es imperioso que se tenga un amplio bagaje de conceptos y palabras que rodea la temática en cuestión; además, es muy importante tener presente el significado de todas y cada una de las palabras del contexto en el cual se encuentren.

1.1 Clasificación de las estrategias

Existe una gran diversidad de opiniones al momento de categorizar las estrategias de aprendizaje, pero suele haber una gran coincidencia entre muchos autores, según Pintrich y De Groot (1990, 35-48), establecen tres grandes clases de categorías: cognitivas, metacognitivas, y de manejo de recursos.

1.1.1 Estrategias cognitivas. Hacen referencia a la integración del nuevo material con el conocimiento previo, la mayor parte de las estrategias incluidas en esta categoría son selección, organización y elaboración de la información; que constituyen las condiciones cognitivas del aprendizaje significativo, de acuerdo con Mayer (1992,23-40), quien define el aprendizaje como un proceso en el que el aprendiz se implica en seleccionar información relevante, organizarla de modo coherente, e integrarla en la estructura de conocimientos ya existente.

1.1.2 Estrategias metacognitivas. Hacen referencia a la planificación, control y evaluación por parte de los estudiantes de su propia cognición, conformando un conjunto de estrategias que permiten el conocimiento de los procesos mentales, así como el control y regulación de los mismos, con el objetivo de lograr determinadas metas de aprendizaje.

El conocimiento metacognitivo, afirma Flavell (1987, 21-29), requiere conciencia y conocimiento de variables de la persona (la conciencia y el conocimiento que tiene el sujeto de sí mismo y de sus capacidades y limitaciones cognitivas). Para Kurtz (1990, 35), la metacognición regula de dos formas el uso eficaz de estrategias: - en primer lugar, para que un individuo pueda poner en práctica una estrategia, antes debe tener conocimiento de estrategias específicas y saber cómo, cuándo y por qué debe usarlas (por ejemplo, conocer las técnicas de repaso, subrayado, resumen, etc., y saber cuándo conviene utilizarlas), y - en segundo lugar, mediante su función auto-reguladora, la metacognición hace posible observar la eficacia de las estrategias elegidas y cambiarlas según las demandas de la tarea.

1.1.3 Estrategias de manejo de recursos. Incluyen diferentes tipos de apoyo que contribuyen a que la resolución de la tarea se lleve a buen término, como lo afirman González y Tourón (1992, 56-61). Tienen como finalidad sensibilizar al estudiante con lo que va a aprender; e integra tres ámbitos: la motivación, las actitudes y el afecto. La importancia de los componentes afectivo-motivacionales en la conducta estratégica es puesta de manifiesto por la mayor parte de los autores que trabajan en este campo. Se coincide en afirmar que los motivos, intenciones y metas de los estudiantes determinan en gran medida las estrategias específicas que utilizan en tareas de aprendizaje particulares, por lo que la motivación es un componente necesario de la conducta estratégica y un requisito previo para emplear estrategias. Lo anterior indica que los estudiantes suelen disponer de una serie de estrategias para mejorar el aprendizaje, aunque la puesta en marcha de éstas depende, entre otros factores, de las metas que persigue el alumno, referidas tanto al tipo de metas académicas (p ej; metas de aprendizaje-metas de rendimiento), como a los propósitos e intenciones que guían su conducta ante una tarea de aprendizaje en particular.

De este modo, parece que no es suficiente con disponer de las estrategias de aprendizaje adecuadas; es necesario saber cómo, cuándo, y por qué emplearlas para saber controlar su mayor o menor eficacia, así como modificarlas en función de las demandas de la tarea. Por tanto, el conocimiento estratégico requiere saber qué estrategias son necesarias para realizar una tarea, saber cómo y cuándo utilizarlas; pero, además, es preciso que los estudiantes tengan una posición favorable y estén motivados, tanto para ponerlas en marcha como para regular, controlar y reflexionar sobre las diferentes decisiones que deben tomar en el momento de enfrentarse a la resolución de esa tarea.

Symons et. al (1989, 16-30) expresan que «un pensador competente analiza la situación de la tarea para determinar las estrategias que serían apropiadas. A continuación, se va formando un plan para ejecutar las estrategias y para controlar el progreso durante la ejecución. En el caso de dificultades, las estrategias ineficaces son abandonadas a favor de otras más adecuadas. Estos procesos son apoyados por creencias motivacionales apropiadas y por una tendencia general a pensar estratégicamente».

Por consiguiente, cuando se aborda el tema de las estrategias de aprendizaje no puede quedar reducido al análisis y puesta en marcha de determinados recursos cognitivos que favorecen el aprendizaje; además, es preciso recurrir a los aspectos motivacionales y disposiciones que son los que, en último término, condicionan la puesta en marcha de dichas estrategias. Aunque para realizar un óptimo aprendizaje sea necesario saber cómo hacerlo y poder hacerlo, lo que requiere ciertas capacidades, conocimientos, estrategias, etc.; también se precisa de una disposición favorable por parte del estudiante para poner en funcionamiento todos los recursos mentales disponibles que contribuyan a un aprendizaje eficaz.

2. Estrategia para la resolución de problemas matemáticos

En el área de las ciencias exactas, es muy usual escuchar la formulación de la siguiente pregunta: ¿Existe algún método para resolver problemas? La respuesta más sensata a dicho interrogante es: Si hubiera un método que pudiera emplearse con igual eficacia para resolver cualquier tipo de problema, lo más seguro es que no habría en las matemáticas tantos interrogantes no resueltos², a pesar del tiempo y esfuerzo invertido.

Existe, sin embargo, una ciencia llamada *Heurística*, que antiguamente tenía por objeto el estudio de las reglas y los métodos del descubrimiento y de la invención, y a cuyo desarrollo contribuyeron eminentes personajes de la ciencia tales como Leibniz, Descartes y Bolzano. Modernamente, la Heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en éste proceso.

² Un ejemplo es el problema de determinar si es verdadera o falsa la conjetura de Goldbach, planteado a mediados del siglo XVIII, según la cual todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos.

Una de las personas que más ha contribuido al desarrollo de la Heurística moderna es Polya³, quien en 1945, publicó su libro *How to solve it* (Como resolverlo), el cual continúa siendo un verdadero paradigma más de sesenta años después de su publicación. En sus estudios, estuvo muy interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos; advirtió que para entender una teoría, se debe conocer como fue descubierta, por lo que su enseñanza enfatiza en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados.

2.1 Método de los cuatro pasos de Polya

Se ha generalizado el método en los siguientes cuatro pasos (Comprender el problema, Configurar o concebir un plan, Ejecutar el plan y, Visión retrospectiva), enfocado en la resolución de problemas matemáticos. En este momento, es importante señalar alguna distinción existente entre ejercicio y problema: Para resolver un ejercicio, se aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a una respuesta, en tanto, para resolver un problema, se hace una pausa, se reflexiona y se ejecutan pasos originales que no se habían ensayado antes para dar la respuesta; esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta, sino que depende en gran medida del estado mental de la persona que se enfrenta a ofrecer una solución.

Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas puesto que ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos los cuales pueden ser aplicados cuando se necesite resolver un determinado problema.

3 George Polya (1888-1985), matemático húngaro, Doctorado en la Universidad de Budapest quien en su disertación de grado abordó temas de probabilidad. Fue maestro en el Instituto Tecnológico Federal en Zúrich, Suiza. En 1940 llegó a la Universidad de Brown en EE UU y paso a la Universidad de Stanford en 1942.

Las aportaciones de Polya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro *Cómo plantear y resolver problemas*, que se ha traducido a más de 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas.

2.1.1 Comprender el problema. El primer paso pone de manifiesto una característica esencial a los problemas: en todo problema se proporciona una información o un conjunto de datos, se requiere otra información que puede ser, por ejemplo, el valor de algunas incógnitas, la demostración de una proposición o la construcción de algún objeto; algo importante se podría poner de manifiesto con relación a los pasos reseñados por Polya y es lo concerniente a cuál es la simbología más eficiente para representar la información al problema; la comprensión del problema implica que se tenga con absoluta certeza el conocimiento de toda la información de entrada, las variables que se deben encontrar y la información proporcionada en el problema a resolver.

2.1.2 Concebir o configurar un plan. El segundo paso, la concepción de un plan de solución, se facilita cuando se posee la simbología adecuada, ya que ésta, bien empleada, permite convertir el problema, que puede ser de cualquier naturaleza, en un problema de naturaleza matemática que en muchos casos se reduce, por ejemplo, a encontrar soluciones a una ecuación o a realizar algún tipo de cálculo; se puede usar en éste paso algunas estrategias tales como hacer una figura representativa del problema.

2.1.3 Ejecución del plan. El tercer paso consiste en resolver el problema matemático que se obtiene con el resultado del segundo paso y que requiere la habilidad operativa adquirida en cursos básicos de las ciencias básicas.

Implementar la ó las estrategias que se han elegido hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso.

Conceder un tiempo suficiente y razonable para resolver el problema. si no hay éxito en la solución se puede solicitar una sugerencia.

No hay que temer de empezar nuevamente; suele acontecer que un comienzo fresco ó una nueva estrategia conducen al éxito.

2.1.4 Visión retrospectiva. «Aún los buenos alumnos, una vez que han obtenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa. Al proceder así omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo. Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. Siempre queda algo por hacer; mediante

un estudio cuidadoso y una cierta concentración, se puede mejorar cualquier solución, y en todo caso, siempre podremos mejorar nuestra comprensión de la solución» (Polya, 1979, 23-29). En términos generales la resolución de un problema se puede esquematizar como se indica en la figura 1.

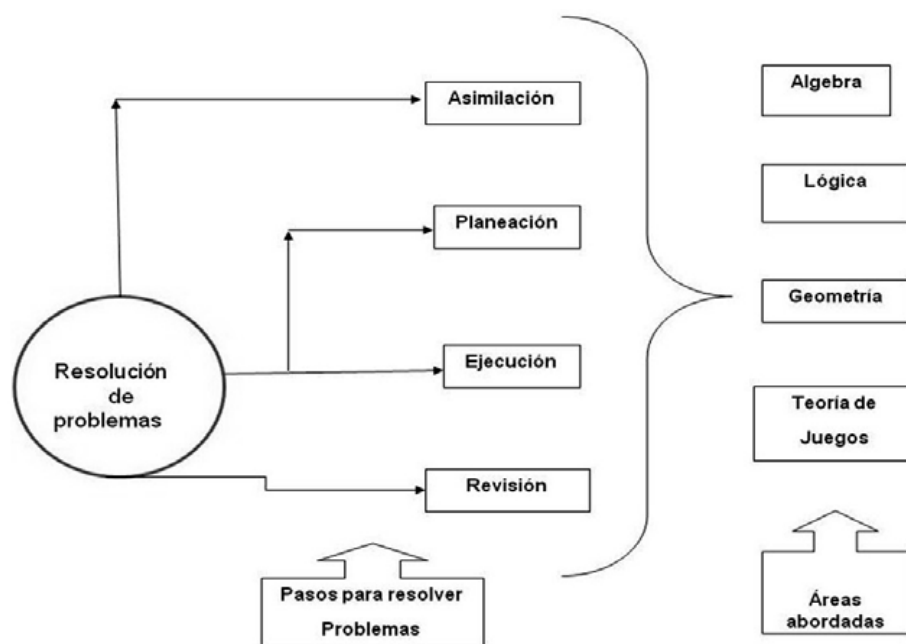


Figura 1. Esquema de la Resolución de problemas (Ortiz, et al 2008, 15)

2.2 Aplicación de los cuatro pasos a un problema matemático específico

Al salir de compras de una tienda de modas, llevaba en el monedero unos 15 euros en monedas de 1 euro y monedas de 20 céntimos de euro. Al regresar, traía tantos euros como monedas de 20 céntimos tenía al comienzo, y tantas monedas de 20 céntimos de euro como monedas de euro tenía antes. En el monedero quedaba un tercio del dinero que llevaba al salir de compras. ¿Qué cuantía alcanzaron las compras?

2.2.1 Comprender el problema (asimilación). Se resumen en la tabla 1, a través de un lenguaje semiformal, las condiciones proporcionadas por el problema, en las cuales los datos se hallan de manera implícita.

En la primera condición se emplea el símbolo de igualdad aproximada habida cuenta que no se especifica exactamente la cantidad total inicial de dinero. A partir de la información del problema se desprende que la información requerida es el precio de compras.

Tabla 1. Tabla de asimilación

Condición
Total Inicial de dinero $\approx$ 15 euros (aproximadamente igual a 15 euros)
Cantidad final de monedas de 1 euro = Cantidad inicial de monedas de 20 céntimos de euro
Cantidad final de monedas de 20 céntimos = Cantidad inicial de monedas de 1 euro.
Total final de dinero = $1/3$ (Total inicial de dinero)

2.2.2 Concebir o configurar un plan. Para convertir la información anterior a un lenguaje simbólico se puede introducir la siguiente simbología, la tabla 2 muestra las variables involucradas en el problema.

Tabla 2. Descripción de las variables

Símbolo	Descripción
T_i	Total inicial de dinero en céntimos.
T_f	Total final de dinero en céntimos.
F_i	Cantidad inicial de monedas de 1 euro.
F_f	Cantidad final de monedas de 1 euro.
C_i	Cantidad inicial de monedas de 20 céntimos de euro.
C_f	Cantidad final de monedas de 20 céntimos de euro.
P	Precio de las compras.

Las unidades empleadas para la resolución del problema son los céntimos. El uso de la unidad común para las incógnitas evita tener que usar símbolos de unidad en las ecuaciones; las condiciones del problema se pueden traducir de la manera siguiente a la forma simbólica:

$$T_i \approx 1500$$

$$F_f = C_i$$

$$C_f = F_i$$

$$T_f = \left(\frac{1}{3}\right)T_i$$

Dado que aún no se evidencia la relación entre la incógnita a resolver y los datos dados, es preciso que se agregue, con una clara justificación, algunas hipótesis mínimas, según lo muestra la tabla 3:

Tabla 3. Hipótesis y Justificación

Ítem	Hipótesis	Justificación
1	$T_f = T_i - P$	El valor que queda después de la compra es igual a lo que se tenía antes de la compra menos el precio de la misma

Ítem	Hipótesis	Justificación
2	$T_i = 100F_i + 20C_i$	Cada moneda de un euro contribuye con 100 céntimos al total inicial de dinero y cada moneda de veinte céntimos con 20 céntimos
3	$T_f = 100F_f + 20C_f$	Cada moneda de un euro contribuye con 100 céntimos al total final de dinero y cada moneda de veinte céntimos con 20 céntimos.

Con lo anterior, se puede resolver un sistema de ecuaciones con las ecuaciones contenidas en las hipótesis y con las ecuaciones descritas formalmente en las condiciones.

2.2.3 Ejecutar el plan. Observando las condiciones y las hipótesis en busca de relaciones entre ellas, no es difícil darnos cuenta de que si se combinan la condición 4, con las hipótesis 2 y 3, se puede obtener la ecuación:

$$\begin{aligned}
 T_f &= (1/3)T_i \\
 \text{Luego: } 100F_i + 20C_i &= 3(100F_f + 20C_f) \\
 40F_i &= 300C_i - 20C_i \\
 F_i &= 7C_i
 \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se halla el valor de ; se podría conocer de manera inmediata el valor correspondiente de F_i , T_i , F_f , C_f , T_f , P ; pero ¿cuál es la manera más apropiada de encontrar el valor de C_i ? El valor de T_i puede expresarse en términos de C_i , por lo tanto sustituyendo F_i por $7C_i$ en la hipótesis 2, se obtiene:

$$T_i = 100(7C_i) + 20C_i = 720C_i$$

Esta ecuación muestra que T_i y C_i son directamente proporcionales, es decir, el primero aumenta a medida que lo hace el segundo. Y dado que el valor de C_i debe ser un valor entero positivo, con la tabla siguiente se puede conocer qué tan cerca puede estar T_i de 1500, (tabla 4).

Tabla 4. Resultados finales

Variables	Valores		
C_i	1	2	3
T_i	720	1440	2160

De lo anterior se desprende que de todos los posibles valores de T_i el más cercano a 1500 es 1440 y se obtiene con un valor de $C_i=2$, Con la ayuda de la ecuación $F_i=7 C_i$ se obtiene que $F_i=14$ y que $C_f=14$, con lo cual, según la hipótesis $3T_f=480$,.De aquí se obtiene finalmente, según

la hipótesis 1, la solución para $P=960$ céntimos, que corresponden exactamente a 9 euros y 60 céntimos.

2.2.4 Visión retrospectiva (reflexión). Deben considerarse las siguientes premisas:

- Las referencias reiteradas a las condiciones y a las hipótesis en la solución revelan la importancia de una enumeración de las mismas, tal como se efectuó en los pasos 1 y 2, Así será más fácil seguir referencias.
- La simbología escogida fue adecuada, habida cuenta que, permitió traducir al lenguaje matemático toda y cada una de la información contenida en el problema y en las hipótesis que se agregaron; además se pudo manipular de manera fácil toda la información y razonar acerca de ella.
- Hay que tener en cuenta que un problema puede tener varias soluciones, unas mejores que otras, y por eso es necesario desarrollar criterios para escoger la mejor.

3. Enseñanza de la matemática y computadora

Es un hecho que la computadora, y en general las TIC (Tecnologías de la información y la comunicación), son elementos que caracterizan a la civilización moderna; y definen una sociedad que gradualmente está más conectada a ellas. Estos cambios sociales imponen nuevas formas de pensar y actuar, y en particular a quienes están involucrados en procesos académicos, al punto de que la utilización de los avances tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje exige la reestructuración de los contenidos, métodos y medios de enseñanza (los métodos de la didáctica en general); unido a lo anterior se presenta una creciente utilización de herramientas y métodos matemáticos en las investigaciones en todos los ámbitos del conocimiento, lo que exige una ardua preparación y adquisición de conocimientos que permita integrarlas en forma efectiva al uso de la computadora.

Las matemáticas desempeñan un importante papel en la visión del mundo, en la forma cómo actualmente es la civilización tecnológica. La comunicación está hoy en día mediatizada por las matemáticas, transmitida en forma digitalizada a lo largo de cables ó fibras ópticas. El objetivo primordial de las matemáticas básicas consiste en desarrollar

en los estudiantes la habilidad de hacer razonamientos inteligentes con información cuantitativa. Los conceptos, las técnicas y los principios matemáticos que establecen los modelos de los aspectos cuantitativos de la experiencia son proporcionados por las estructuras de los sistemas numéricos, del álgebra y de la medición, que han sido por largo tiempo el punto central de los planes de estudio académicos.

Sin embargo, el advenimiento de las calculadoras electrónicas y las computadoras como herramienta de gran capacidad para representar y manipular información cuantitativa, ha puesto en entredicho las prioridades tradicionales de la instrucción de estos temas. Hoy en día, no tiene sentido dedicar partes considerables de los planes de estudio académicos a capacitar a los estudiantes en algoritmos aritméticos ó algebraicos que pueden realizarse con rapidez y exactitud mediante el uso de calculadoras. Calcular extensas sumas de cuadrados de números reales manualmente no aumenta la comprensión, tan solo entorpece la mente. La disponibilidad de poderosos auxiliares de cálculo ha llevado a un aumento significativo de la variedad de situaciones en las que se aplica el razonamiento cuantitativo. En consecuencia, las matemáticas básicas deben brindar a los estudiantes la preparación para usar sus conocimientos acerca de los números, el álgebra y la medición en formas flexibles y creativas, no sólo en cálculos rutinarios y predecibles.

La automatización de los cálculos rutinarios permite que el estudiante se concentre en otros aspectos de la solución de problemas, planear un análisis adecuado, interpretar los resultados en un contexto y hacer nuevas preguntas matemáticas sugeridas por un ejercicio; por todo lo anterior es evidente que la computadora, usada racionalmente, puede convertirse en una valiosa herramienta para la enseñanza de las matemáticas universitarias, y no solamente desde la óptica del cálculo numérico, sino también para el cálculo simbólico. Lenguajes de programación, tales como *Matemática*, *Maple*, *Matlab*, etc., tienen incorporadas una amplia variedad de herramientas de cálculo simbólico, que permiten por ejemplo, realizar factorizaciones, reunir términos semejantes, calcular límites de funciones, realizar las operaciones matemáticas básicas con funciones, calcular derivadas e integrales, y resolver analíticamente ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Las herramientas numéricas y simbólicas de tales lenguajes, puestas al servicio de la enseñanza de las matemáticas, pueden ayudar a cambiar el modo como tal ciencia se enseña actualmente.

Sin lugar a dudas las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales son un instrumento, mediante el cual el ingeniero y científico, emplean para modelar fenómenos de la naturaleza; y que a través de un programa de cómputo (como *Matemática* ó *Matlab*) pueden dar cuenta de la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se estudian en un curso normal de tal asignatura. Existen otros métodos mediante los cuales es posible estudiar las ecuaciones diferenciales: métodos cualitativos, numéricos y de aproximación donde la computadora juega un papel preponderante; por lo anterior se desprende que es siempre posible emplear los recursos computacionales para desarrollar las capacidades intelectuales de los estudiantes y hacer de las matemáticas un tema agradable y de gran interés.

Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto e ilustran el gran poder de los programas, tales como *Matlab*, para el uso de la computación gráfica, simbólica y numérica en la enseñanza de las matemáticas.

Ejemplo 1. Realizar un programa para calcular la superficie (área) de un triángulo, donde se conocen las longitudes de sus lados a , b y c , utilizando la fórmula de Herón.

La fórmula de Herón para el cálculo de la superficie de un triángulo está dada por:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde p son las longitudes de sus lados, es el semiperímetro definido por:

$$p = (a + b + c)/2$$

Al efectuar operaciones algebraicas, la ecuación anterior puede ser transformada a la forma siguiente:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

Donde S representa el área del triángulo. El ejercicio se resolverá de una manera computacional empleando el lenguaje de programación *Matlab*; para tal efecto es necesario escribir el archivo en el editor de texto de *Matlab* para posteriormente correr el programa para cualquier valor de las longitudes del triángulo. La figura 2 muestra el programa escrito en un *M-file* (archivo *script*).

```

1 %HERON
2 %El programa Calcula la superficie de una triangulo conocidos 3 de sus lados
3 %mediante la formula de HERON.
4 %dados los tres lados
5 %VARIABLES
6 %a,b,c : Longitud de los lados del triangulo
7 %
8 %clear
9 %ENTRADA DE LOS DATOS
10
11 %a=input('\n Digite el valor del lado a:\n')
12 %b=input('\n Digite el valor del lado b:\n')
13 %c=input('\n Digite el valor del lado c:\n')
14 %CALCULO DEL AREA
15
16 %s=sqrt((a+b+c)*(a+b-c)*(b+c-a)*(c+a-b))/4;
17
18 %SALIDA DE DATOS
19 %display(a)
20 %display(b)
21 %display(c)
22 %display('el area superficial es : ')
23 %display(s)
24
25 %FIN DEL PROGRAMA HERON
26
27
28

```

Figura 2. Programa para hallar la superficie de un triángulo usando la formula de Herón

Matlab es una poderosa herramienta para la construcción de gráficas en el plano cartesiano al igual que en el espacio tridimensional; el siguiente ejemplo permite visualizar como el mencionado programa realiza gráficas en el plano polar.

Ejemplo 2. Dibujar la curva de la ecuación $r=1+\cos w$, para $0 \leq w \leq 2\pi$; Las instrucciones en *Matlab* para la construcción de la gráfica son las siguientes:

```

>> w = linspace(0,2 * pi);
>> r = 1 + cos(w);
>> polar(w,r)

```

Pulsando *Enter* se abre una ventana gráfica que muestra la figura 3.

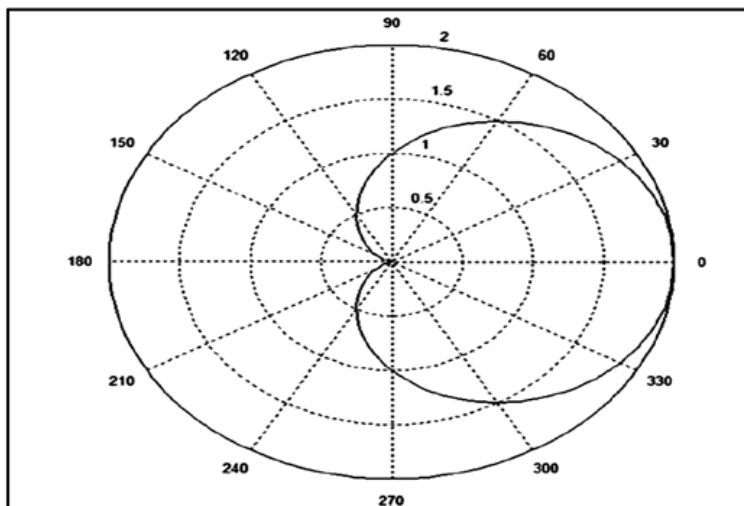


Figura 3. Cardioide

El próximo ejemplo proporciona las instrucciones que se ejecutan para la construcción de curvas en el espacio.

Ejemplo 3. Dibujar la curva de las ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$z = t$$

Para todo valor de $t \in [0, 2\pi]$. *Matlab* emplea el comando `Plot3` ó el comando `ezPlot3`.

Con `Plot3`: Las siguientes instrucciones permiten visualizar la gráfica de la función escrita en forma paramétrica

```
>> t=linspace(0.6 * pi,150);
```

```
>> plot3( cos(t),sin(t),t)
```

```
grid on
```

Al pulsar la tecla *Enter* en la ventana de comandos de *Matlab* se obtiene la curva parametrizada en el espacio tridimensional, presentada en la figura 4.

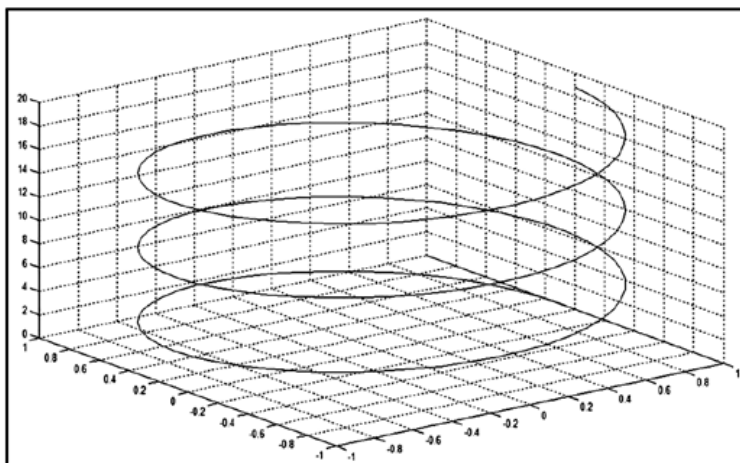


Figura 4. Curva Paramétrica (Hélice)

Con `ezPlot`: la instrucción es: `>> ezPlot3 ('cos(t)', 'sin(t)',t',[0.6*pi])`

Cuando se tienen curvas escritas en forma paramétrica una manera de representar vectores tangentes a la curva es la siguiente:

```

x = cost
y = sent (Curva Paramétrica)
z = t
>>t = linspace(0,pi,30);
>>plot(cos(t), sin(t))
>>hold on
>>t = linspace(0,pi,10);
>>quiver(cos(t), sin(t), -sin(t), cos(t))

```

Pulsando *Enter* en la ventana de comandos de *Matlab* se obtiene la figura 5.

Para dibujar superficies en el espacio con ecuaciones generales $z=f(x,y)$ se empiezan a definir los correspondientes intervalos para las variables independientes x, y ; tal y como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Dibujar la superficie $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el dominio $[-3,3] \times [-3,3]$

La superficie corresponde a un cono y se dibuja a partir de las siguientes instrucciones:

```

>>[x, y] = meshgrid(-3:.1:3, -3:.1:3);
>>z = sqrt(x.^2+y.^2)
>>surf(x, y, z)

```

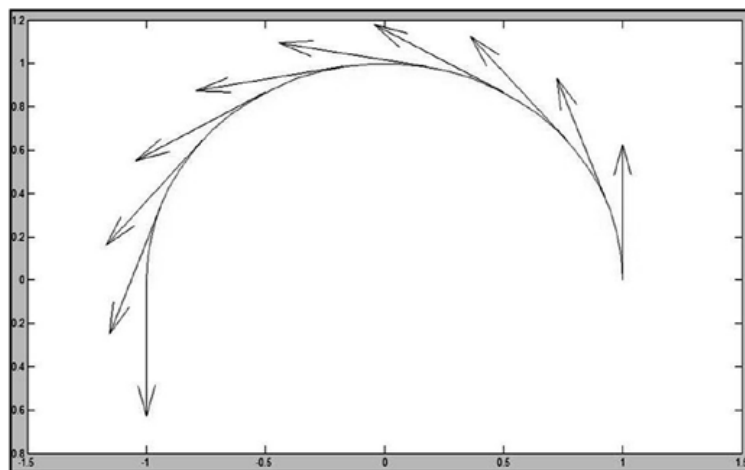


Figura 5. Vectores Tangentes a la Curva

La superficie engendrada al teclear *Enter* se muestra en la figura 6.

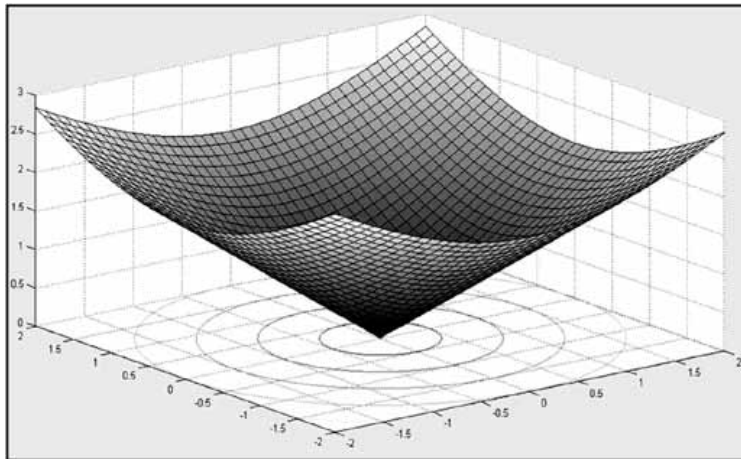


Figura 6. $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejemplo 5. Construir la gráfica y las curvas de nivel (trazas) de la superficie

$$z = f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2} + 0.1}$$

La construcción de la grafica en el espacio tridimensional se efectúa con las instrucciones mencionadas con anterioridad, es decir:

```
>> [X,Y] = meshgrid (-10:0.5:10)
Z=sin (sqrt (X.^2+Y.^2))./sqrt (X.^2+Y.^2+0.1);
mesh(X,Y,Z)
surf(X,Y,Z)
```

La superficie en las variables independientes aparece en la figura 7.

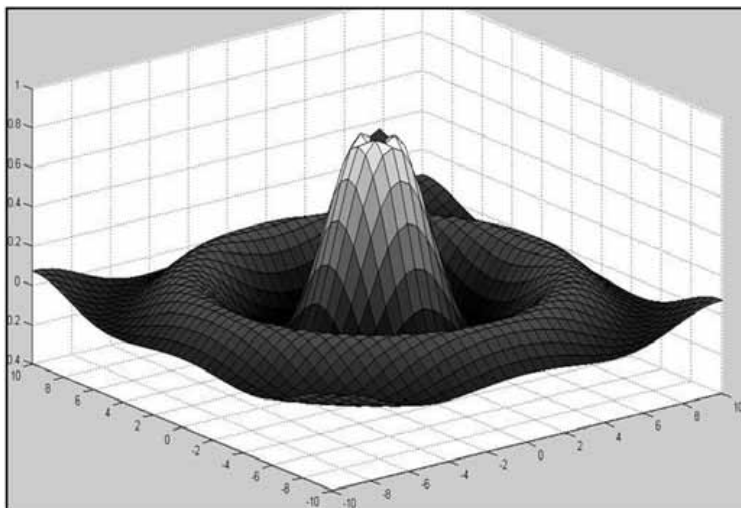


Figura 7. $z = f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2} + 0.1}$

Al dibujar la superficie $z = f(x,y)$ se pueden construir las curvas de nivel en el plano z ; la manera de proceder es:

hold on
contour(X,Y,Z[C1,C2,C3])

Y aparecen las curvas de nivel $f(x,y) = C_i$; para $i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$

En el ejemplo que se considera la instrucción para líneas de contorno (Figura 8) es: `>> contour(X,Y,Z)`

Ejemplo 6. Dibujar una superficie plana en el primer octante paralela al plano $z=0$.

En el primer octante una superficie plana paralela es el plano $z=3$, por consiguiente la superficie puede obtenerse de la siguiente forma (Figura 9):

```
>> [x,y] = meshgrid (-4:.1:4,-4:.1:4);  
[m,n] = size(x), z=3 * ones (m,n);  
surf (x,y,z)
```

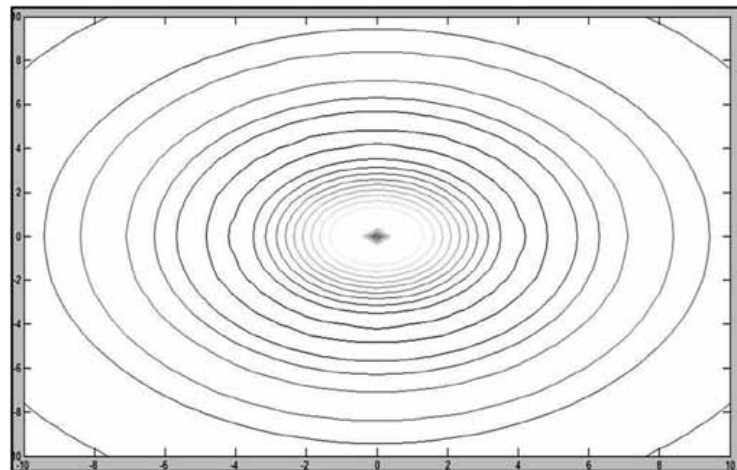


Figura 8.
Curvas de Nivel

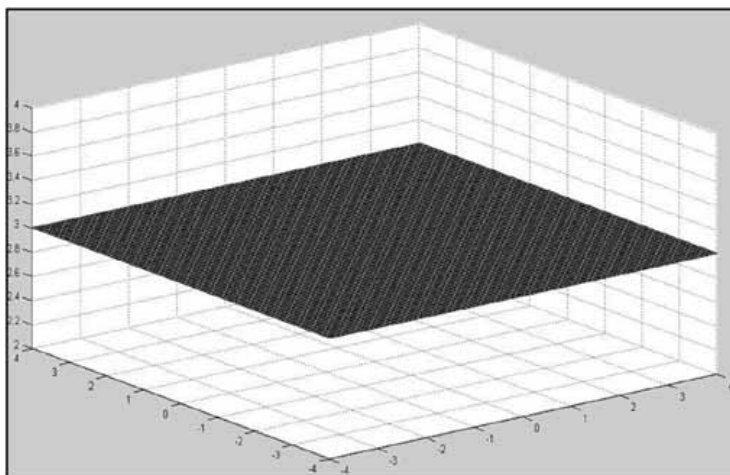


Figura 9.
Superficie Plana 3

4. Conclusiones

- La computadora, y en general las tecnologías de la información y comunicación, proponen cambios revolucionarios en la investigación de tal manera que contribuyan a la enseñanza y desarrollo del pensamiento.
- En su papel como estimulador y facilitador del aprendizaje el docente de matemáticas debe de ser promotor del uso correcto y sistemático de la computadora y todas las nuevas tecnologías de la información y comunicación.
- Todas las personas encargadas de transmitir el conocimiento, en particular los docentes de matemática, no pueden dejar de asumir e integrar la computadora y los medios modernos de la comunicación e información en todas sus competencias para mejorar los procesos de enseñanza.
- El docente universitario de hoy está involucrado por la evolución de la información y las nuevas tecnologías de la enseñanza de las matemáticas; razón por el cual debe incorporar las diferentes morfologías de la información tales como la imagen, sonido, texto, computación gráfica, computación simbólica, computación numérica, etc., como una herramienta eficaz en la enseñanza y desarrollo del pensamiento en estudiantes.
- El uso de estrategias y métodos heurísticos empleados en la comprensión, planteamiento y desarrollo de problemas matemáticos al igual que su correspondiente articulación con un componente informático, permite que el estudiante adquiera y desarrolle la habilidad para interiorizar, reflexionar y comprender mejor los problemas matemáticos.

Bibliografía

- CHAPRA C Steven y CANALE P Raymond (2000). Métodos Numéricos para Ingenieros. México (México): McGraw-Hill. 982 p. ISBN 970-102008.
- DEMANA D., Franklin; KENNEDY, Daniel; FOLEY D., Gregory y BLITZER, Robert (2009). Matemáticas Introdutorias con Nivelador MYMATHLAB. México (México): Pearson Educación. 145 p. ISBN 978-607-442-048-7.
- DONALD, Spencer (1992). Webster's New Word Dictionary of Computer Terms. New York (USA): Prentice Hall. 458 p. ISBN 0-671-84651-5.
- ETTER M, Delores (1998). Solución de problemas de Ingeniería con Mat-Lab. México (México): Prentice Hall. 329 p. ISBN: 970-17-0111-9.
- FLAVELL, J. H (1987). Speculation about the nature and development of metacognition. En: WEINERT, F. E. and KLUWE, R. H. Kluwe (Eds.) (1987). Metacognition, Motivation and Understanding. Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates p. 21-29.
- GONZÁLEZ, M. C. y TOURON, J. (1992). Autoconcepto y rendimiento escolar. Pamplona (España): Eunsa. 388 p.
- KURTZ, B. E (1990). Cultural influence in children's cognitive and metacognitive Development. En: SCHNEIDER, W. and WEINERT, F. E. (Eds.) (1990). Interactions among aptitudes, strategies and knowledge in cognitive performance. New York (USA): Springer-Verlag. 57 p.
- MATHEWS Jhon H. y FINK Kurtis D. (2000). Métodos Numéricos con Matlab. Madrid: Pearson Educación. 721p. ISBN: 84-8322-181-0
- MAYER, R. E. (1992). Guiding Students cognitive processing of scientific information. San Diego (USA): Academic Press. 129 p.
- NAKAMURA, Shoichiro (1992). Métodos Numéricos Aplicados con Software. México (México): Prentice Hall. 569 p. ISBN: 968-880-263-8
- NAKAMURA, Shoichiro (1997). Análisis Numérico y Visualización gráfica con Matlab. Naucalpan de Juárez (México): Prentice Hall. 476 p. ISBN 968-880.860-1
- ORTIZ ÁLVAREZ Hugo Hernán; BUITRAGO ROJAS, Andrés Felipe; GÓMEZ CORREA, Luis Alejandro; AMADOR RODRÍGUEZ, Andrés Felipe y GARCÍA CASTRO, Ligia Inés (2008). Desarrollo del pensamiento matemático. Manizales (Colombia): Universidad Autónoma de Manizales. 62 p. ISBN 978-958-8208-40-4.
- PERELMAN, Yakov (1975). Algebra Recreativa. Moscú (URSS): Mir. 179 p.
- PINTRICH, Paul R. and DE GROOT, Elisabeth V. (1990). Motivational and self-regulation learning component of classroom academic performance [en línea]. En: Journal of Educational Psychology, Vol. 82, No. 1, (mar., 1990). p. 33-40. Washington, DC (USA): American Psychological Association. ISSN: 1939-2176. <<http://psycnet.apa.org/journals/edu/82/1/33/>> [consulta: 25/07/2010]
- POLYA, George (1979). Cómo plantear y resolver problemas. México (México): Trillas.
- SYMONS, C., SNYDER, B.L., CARIGLIA-BULL, T. y PRESSLEY, M (1989). Why be Optimistic about cognitive strategy instruction. New York (USA): Springer, 128 p.
- THE MATH WORKS (1996). Mat-Lab, Edición del estudiante Versión 4. Madrid (España): Prentice Hall. 818 p. ISBN 0-13-459793-1
- TORO CARVAJAL, Luis Alberto (2007). Matemáticas, Ingeniería y Computadora. En: Revista Educación en Ingeniería, No. 3 (jul., 2007), p. 55-65. Bogotá (Colombia): Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería – ACOFI. ISBN: 1900-8260.
- TORO CARVAJAL, Luis Alberto (2009). Una introducción a MATLAB para Estudiantes de Ingeniería. Manizales (Colombia): Universidad Autónoma de Manizales. 210 p. ISBN: 978-958-8208-48-0
- WEINSTEIN, C. E and MAYER, R. F (1986). The teaching of learning strategies. En: WITTROCK, M. (comp.) (1986). Handbook of research on teaching, 3 ed. New York (USA): McMillan Publishing Co. p. 315-327